Chapitre 27

Applications linéaires (partie A)

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E, F, G désignent des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$.

1 Généralités

1.1 Définition, morphisme d'e.v.

Définition 27.1 (Application linéaire)

Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si

$$\begin{cases} \forall u, v \in E & f(u+v) = f(u) + f(v) \\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall u \in E & f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \forall u, v \in E \qquad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

On dit également que f est un morphisme (d'espaces vectoriels) de E dans F.

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
- Lorsque $F = E$, on note $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$.

Exemple 1. L'application nulle 0_{F^E} est linéaire, donc $0_{F^E} \in \mathcal{L}(E, F)$.

Exemple 2. L'application id_E est clairement linéaire de E dans E. On a donc $\mathrm{id}_E \in \mathcal{L}(E)$.

Exemple 3. Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 2x - 3y \end{array}$$

Propriété 27.2

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $\forall x \in E \qquad f(-x) = -f(x)$
3. L'image de toute combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K} \qquad \forall x_1, \cdots, x_n \in E \qquad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration. Comme f est une application linéaire, elle est en particulier un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(F, +)$. On en déduit les deux premières assertions. La troisième se montre immédiatement par récurrence. □

Définition 27.3 (**morphismes)**

1. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f est un endomorphisme (de E).
2. Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et f est bijective, on dit que f est un isomorphisme (d'e.v.).
3. Si f est un endomorphisme (de E) et un isomorphisme, on dit que f est automorphisme (de E).

Exemple 4. L'application id_E est un automorphisme de E car elle est bijective (sa réciproque est elle-même).

1.2 Exemples classiques d'applications linéaires

Les applications suivantes sont toutes linéaires. Sont-elles des endomorphismes ? Des isomorphismes ?

Endomorphismes ? Isomorphismes ?

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{K}$
$$\begin{aligned} \mathbb{K}^I &\to \mathbb{K} \\ f &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C([0,1],\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto A^\top \end{aligned}$$

Pour tout $a \in \mathbb{K}$
$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

Avec $CV := \{(u_n) \in \mathbb{K}^n \mid \exists \ell \in \mathbb{K} \quad u_n \to \ell\}$
(notation non-officielle !)
$$\begin{aligned} CV &\to \mathbb{K} \\ (u_n) &\mapsto \lim u_n \end{aligned}$$

1.3 Opérations sur les morphismes

Rappel : soit Ω un ensemble. Pour toutes applications $f, g \in F^\Omega$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit :

$$\begin{aligned} f+g :\Omega &\to F \\ x &\mapsto f(x)+g(x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \lambda f :\Omega &\to F \\ x &\mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

Ces opérations font de F^Ω un e.v. En particulier, avec $\Omega = E$, on a que F^E est un e.v.

Propriété 27.4 (Stabilité par combinaison linéaire)

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, l'application $\alpha f + \beta g$ est également linéaire.
Dit autrement, $\mathcal{L}(E,F)$ est un s.e.v. de F^E.

Démonstration. On a bien $\mathcal{L}(E,F) \subset F^E$. De plus, on a $0_{F^E} \in \mathcal{L}(E,F)$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E,F)$. Il est clair que $\lambda f + \mu g$ est une application de E dans F. Il suffit donc de montrer que l'application $h := \lambda f + \mu g$ est linéaire.

□

Plus généralement, toute combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire : si $f_1, \cdots, f_p \in \mathcal{L}(E,F)$ alors pour tous $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, on a $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p \in \mathcal{L}(E,F)$.

Propriété 27.5 (Stabilité par composition)

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.
De plus, la composition est bilinéaire : avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et f, g, h des applications linéaires telles que ce qui suit ait un sens, on a :

$$(\alpha f + \beta g) \circ h = \alpha f \circ h + \beta g \circ h$$
$$h \circ (\alpha f + \beta g) = \alpha h \circ f + \beta h \circ g$$

Démonstration. Il est clair que $g \circ f$ est une application de E dans G. Montrons que $g \circ f$ est linéaire. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$.

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\alpha x + \beta y) &= g(f(\alpha x + \beta y)) \\
&= g(\alpha f(x) + \beta f(y)) && \text{car } f \text{ est linéaire} \\
&= \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y)) && \text{car } g \text{ est linéaire} \\
&= \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y)
\end{aligned}$$

D'où $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$. □

1.4 Isomorphismes

Propriété 27.6 (Stabilité par passage à l'inverse)

Si $f : E \to F$ est un isomorphisme (d'e.v.), alors l'application $f^{-1} : F \to E$ est également un isomorphisme (d'e.v.). De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstration.

Le fait que $(f^{-1})^{-1} = f$ a été démontré au chapitre 4 dans un cadre plus général. $\square$

Propriété 27.7

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes (d'e.v.), alors $g \circ f : E \to G$ est un isomorphisme et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstration. On a déjà montré que $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$. De plus, on a démontré au chapitre 4 que la composée d'applications bijectives est encore bijective, et qu'alors la formule ci-dessus est vérifiée. $\square$

1.5 Image directe, image réciproque d'un s.e.v.

Re-re-rappel : soit $u : E \to F$ une application quelconque **pas nécessairement inversible / bijective**. Pour toutes parties $A \subset E$ et $B \subset F$ (pas forcéments des s.e.v. !), on pose

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset F \qquad\qquad f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E$$

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A \quad f(x) = y \qquad\qquad x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

Malgré la notation, la définition de $f^{-1}(B)$ ne fait pas intervenir f^{-1} (qui n'existe même pas a priori). Donc :

$$\boxed{\text{L'ensemble } f^{-1}(B) \text{ a un sens même si } f \text{ n'est pas bijective !}}$$

Propriété 27.8

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Pour tout s.e.v. A de E, l'ensemble $f(A)$ est un s.e.v. de F.
- Pour tout s.e.v. B de F, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est un s.e.v. de E.

Démonstration.

□

1.6 Noyau et image d'un morphisme

Définition 27.9 (Noyau et image)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau de f l'ensemble

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}\left(\{0_F\}\right)$$

et on appelle image de f si

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F \mid \exists x \in E \quad f(x) = y\} = f(E)$$

Autrement dit,

- $x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0_F$
- $y \in \operatorname{Im} f \iff \exists x \in E \qquad y = f(x)$

Théorème 27.10

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$

1. $\operatorname{Ker} f$ est un s.e.v. de E.
2. $\operatorname{Im} f$ est un s.e.v. de F.
3. $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } \operatorname{Ker} f = \{0_E\}.}$
4. f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration.

1. Immédiat car $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\})$ et que $\{0_F\}$ est un s.e.v. de F.
2. Immédiat car $\operatorname{Im} f = f(E)$ et que E est un s.e.v. de E.
3. Supposons que f est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors,

$$\begin{aligned} & f(x) = 0_F \\ \Longrightarrow\ & f(x) = f(0_E) \\ \Longrightarrow\ & x = 0_E \qquad\qquad \text{par injectivité de } f \end{aligned}$$

donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ (l'autre inclusion est évidente). Réciproquement, si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, montrons que f est injective. Soit $x, x' \in E$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Longrightarrow f(x) - f(x') = 0_F \\ &\Longrightarrow f(x - x') = 0_F \\ &\Longrightarrow x - x' \in \operatorname{Ker} f \\ &\Longrightarrow x - x' = 0_E \qquad\qquad \text{car } \operatorname{Ker} f = \{0_E\} \\ &\Longrightarrow x = x' \end{aligned}$$

D'où f est injective.

4. Comme $\operatorname{Im} f = f(E)$,

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} f = F \\ \Longleftrightarrow\ & f(E) = F \\ \Longleftrightarrow\ & f \text{ surjective} \qquad\qquad \text{(cf chapitre 4)} \end{aligned}$$

□

Exemple 5. L'application linéaire de dérivation :

$$\begin{aligned} D : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

est non injective. En effet, son noyau est

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} D &= \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f' = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}} \right\} \\ &= \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est constante} \right\} \neq \{0_{\mathbb{R}^\mathbb{R}}\} \end{aligned}$$

Méthode (Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Pour déterminer l'ensemble $\operatorname{Ker} f$, on résout l'équation $f(x) = 0_F$ d'inconnue $x \in E$: les solutions sont exactement les vecteurs de $\operatorname{Ker} f$.
- Pour déterminer l'ensemble $\operatorname{Im} f = f(E)$, on se donne un "paramètre" $y \in F$ et on étudie l'équation $(E_y) : f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$: on a $y \in \operatorname{Im} f$ ssi (E_y) admet au moins une solution (il n'est pas nécessaire de la trouver, il suffit de montrer qu'il en existe une).

La deuxième méthode a déjà été vue dans le chapitre "Applications et relations", c'est pourquoi on ne la détaillera pas sur un exemple. En outre, on verra plus loin que si l'on dispose d'une base de E, on peut déterminer $\operatorname{Im} f$ sous la forme d'un Vect immédiatement, et que lorsque E et F sont de dimension finie, on peut réécrire $\operatorname{Im} f$ sous la forme d'une "équation", comme on l'a vu pour $\operatorname{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$.

Exemple 6. Déterminer le noyau de l'application linéaire :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-y+z, y-z+t, x+t) \end{array}$$

Méthode

Pour montrer qu'un ensemble est un s.e.v. de E, on peut notamment montrer que c'est le noyau (ou encore l'image) d'une application linéaire $f : E \to F$.

Exemple 7. Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid \alpha f(2) + \beta f'(0) + \gamma \int_0^1 f = 0 \right\}$$

est un $\mathbb{R}$-e.v.

1.7 Image d'une famille par une application, calcul de Im f

Définition 27.11 (Image d'une famille par une application linéaire)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{F} = (e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On définit l'image de $\mathcal{F}$ par f comme étant la famille :

$$f(\mathcal{F}) := (f(e_i))_{i\in I}$$

C'est donc une famille de vecteurs de F.

Exemple 8. Soit $f : \mathbb{K}[X] \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $f(P) = \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \end{pmatrix}$. Soit $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$. Alors

$$f(\mathcal{F}) =$$

Lemme 27.12

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E. Alors

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B})) = \operatorname{Vect}\left(f(e_i)_{i\in I}\right)$$

En particulier, si E est de dimension finie n et si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B})) = \operatorname{Vect}\left(f(e_1), \cdots, f(e_n)\right)$$

Méthode (Déterminer Im u)

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour déterminer Im f, on peut se donner une base quelconque $(e_i)_{i\in I}$ de E (en général on prend la base canonique) et obtenir Im f sous la forme d'un Vect.

Lorsque Im f est obtenu sous la forme d'un Vect, si E, F sont de dimensions finies, on peut ensuite passer à une forme “équation” de Im f par des méthodes connues (cf Chapitre 25 – Espaces vectoriels ainsi que l'exemple ci-desssous).

Exemple 9. Déterminer l'image de l'application linéaire :

$$\begin{array}{rl} f : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z,t) \mapsto (x-y+z, y-z+t, x+t) \end{array}$$

1.8 Caractérisations d'une application linéaire

Dorénavant et pour éviter des confusions, on emploiera u, v, w au lieu de f, g, h pour désigner des applications linéaires, et non des vecteurs.

Propriété 27.13 (u est entièrement déterminée par $u(\mathcal{B})$)

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille *quelconque* de vecteurs de F. Alors il existe une *unique* application linéaire u de E dans F telle que

$$\forall i \in I \qquad u(e_i) = f_i$$

Ainsi, étant donné une base quelconque $\mathcal{B}$ de E, il suffit donc de connaitre $u(\mathcal{B}) = (u(e_i))_{i\in I}$ pour reconstruire u sur E tout entier, par linéarité.

Exemple 10. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ une base de $\mathbb{K}_2[X]$. Il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X])$ telle que $u(\mathcal{B}) = (0, 1, 2X)$: il s'agit de l'application linéaire $u : P \mapsto P'$.
Il existe une (unique) autre application linéaire $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_2[X])$ telle que $v(\mathcal{B}) = (v(1), v(X), v(X^2)) = (0, 1, 2X+4)$.
Étant donné $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$, on a alors

$$\begin{aligned} v(P) &= a_0v(1) + a_1v(X) + a_2v(X^2) \\ &= a_0 \times 0 + a_1 \times 1 + a_2 \times (2X+4) \\ &= (a_1 + 4a_2) + 2a_2X \end{aligned}$$

Ainsi, l'application v est définie par : $v : P = \sum_{k=0}^{2} a_kX^k \mapsto (a_1 + 4a_2) + 2a_2X$. On peut vérifier qu'en fait v est l'application définie par $v(P) = P' + 2P''$.

Heuristique de la preuve (propriété 27.13). On ne considère que le cas où E est de dimension finie, notée p. On peut ainsi prendre $I = [\![1, p]\!]$; on suppose donc :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \qquad u(e_i) = f_i$$

Unicité. Soit u, v deux applications linéaires qui vérifient pour tout i de $[\![1, p]\!]$ la relation $u(e_i) = v(e_i) = f_i$. On montre que pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ de E, on a

$$u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i \qquad \text{et même expression pour } v(x)$$

Par arbitraire sur x, on a donc $u = v$. L'application linéaire en question est donc unique.

Existence. On construit une application $u : E \to F$ de la manière suivante. Étant donné $x \in E$ qui se décompose en $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ (qui dépendent de x), on définit

$$u(x) := \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$$

On vérifie que cette application u est bien définie, est linéaire et vérifie $\forall i \in [\![1, p]\!] \quad u(e_i) = f_i$. □

Corollaire 27.14

Si deux applications linéaires coïncident sur une base, alors elles sont égales.

Théorème 27.15 (Caractérisation par des s.e.v. supplémentaires)

Soit A, B deux s.e.v. supplémentaires de E. Soit $v : A \to F$ et $w : B \to F$ des applications linéaires données. Alors il existe une *unique* application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$u|_A = v \qquad \text{et} \qquad u|_B = w$$

2 Endomorphismes

2.1 L'anneau $\mathcal{L}(E)$

Propriété 27.16

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (en général non commutatif).

Éléments de preuve.

- L'élément neutre pour $+$ est l'application nulle de E dans E.
- Le symétrique de u pour $+$ est l'endormorphisme $x \mapsto -u(x)$, noté $-u$.
- L'élément neutre pour $\circ$ est id_E.

□

Remarque. En fait, on a même que $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Ainsi, **si on a** $u \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est bijective / un isomorphisme / un automorphisme
2. u admet une application réciproque : il existe $v : E \to E$ tel que $v \circ u = u \circ v = \mathrm{id}_E$
3. u est symétrisable pour $\circ$ dans $\mathcal{L}(E)$: il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v \circ u = u \circ v = \mathrm{id}_E$

Dans ce cas, on dira que u est inversible et on notera $u^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ sa réciproque.

Plus généralement, il est fréquent d'utiliser la notation multiplicative pour l'anneau $\mathcal{L}(E)$: la composée $u \circ v$ sera alors notée uv, et en particulier on notera $u^2 = u \circ u$, etc.

Définition 27.17 (Notation u^n)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note :

- $u^0 := \mathrm{id}_E$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u^n := \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{n \text{ fois}}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si u est inversible, $\quad u^{-n} := \underbrace{u^{-1} \circ u^{-1} \circ \ldots \circ u^{-1}}_{n \text{ fois}}$

En particulier, pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$: $(u^n)^{-1} = (u^{-1})^n = u^{-n}$ et $u^{n+m} = u^n \circ u^m$.

Attention : pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note typiquement $f^2 : x \mapsto f(x)^2 = f(x) \times f(x)$, i.e. $f^2 = f \times f$, par exemple $\cos^2$, $\sin^2$, etc. Or, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'expression "$u(x) \times u(x)$" n'a aucun sens : on a $u(x) \in E$ et la loi $\times$ n'est a priori pas définie sur E (c'est juste un e.v.). Ainsi, lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$, il faut comprendre que u^2 représente $u \circ u$ et non $u \times u$.

Propriété 27.18 (Calculs dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$)

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

$$\boxed{u \circ v = v \circ u} \quad \Longrightarrow \quad (u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(u^k \circ v^{n-k}\right)$$

$$\boxed{u \circ v = v \circ u} \quad \Longrightarrow \quad u^n - v^n = (u-v) \circ \sum_{k=0}^{n-1} \left(u^k \circ v^{n-k-1}\right)$$

2.2 Groupe linéaire $GL(E)$

Rappel : dans un anneau $(A, +, \times)$, l'ensemble des éléments inversibles de A (qu'on avait noté $A^\times$) est un groupe pour la loi $\times$.

Définition 27.19 (Groupe linéaire $GL(E)$)

Les éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$ sont (par définition) les automorphismes de E.
On note $(GL(E), \circ)$ le groupe des automorphismes de E, dit groupe linéaire de E.

Étant un groupe, $GL(E)$ hérite des propriétés suivantes (également vues aux propriétés 27.6 et 27.7) :

- $\forall u \in GL(E) \qquad u^{-1} \in GL(E)$ et $(u^{-1})^{-1} = u$
- $\forall u, v \in GL(E) \quad (v \circ u) \in GL(E)$ et $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$

Exemple 11. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - 2u - 3\mathrm{id}_E = 0$. Montrer que $u \in GL(E)$ et déterminer u^{-1}.

3 Applications linéaires et dimension

3.1 Isomorphismes en dimension finie

Théorème 27.20

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. u est injective si et seulement si la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est libre.
2. u est surjective si et seulement si la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est génératrice de F.
3. u est bijective si et seulement si la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est une base de F.

En particulier, si E, F sont de dimensions finies différentes, aucune application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ ne peut être bijective.

Démonstration.

1. **Sens direct :** supposons u injective, montrons que $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est libre. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} & \lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_n u(e_n) = 0_F & \\ \Longrightarrow\ & u(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = 0_F = u(0_E) & \text{par linéarité de } u \\ \Longrightarrow\ & \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0_E & \text{car } u \text{ est injective} \\ \Longrightarrow\ & \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 & \text{car } (e_1, \cdots, e_n) \text{ est une famille libre} \end{aligned}$$

   Donc la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est libre.

2. **Sens direct :** on suppose u surjective. Montrons que $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est génératrice de F. Soit $y \in F$. Comme u est surjective, il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. On décompose x selon la base $(e_1, \cdots, e_n)$:

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

   Alors

$$y = u(x) = \lambda_1 u(e_1) + \ldots + \lambda_n u(e_n)$$

   Ainsi, $y \in \text{Vect}(u(e_1), \cdots, u(e_n))$. Par abitraire sur y, on a $F \subset \text{Vect}(u(e_1), \cdots, u(e_n))$. L'autre inclusion est évidente. Ainsi, $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est génératrice de F.

3. Cette assertion découle des deux premières.

$\square$

Définition 27.21

E et F sont dit isomorphes s'il existe un isomorphisme $u : E \to F$. On note alors $E \simeq F$.

Propriété 27.22

On suppose que E est de dimension finie. Alors $E \simeq F$ si et seulement si $\dim E = \dim F$ (ce qui sous-entend que F est de dimension finie).

Démonstration. Sens direct : supposons $E \simeq F$ et notons $u : E \to F$ un isomorphisme. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors par le Théorème 27.20, comme u est bijectif, la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est une base de F. Donc F est de dimension finie et $\dim F = n = \dim E$.

Sens réciproque : On suppose $\dim E = \dim F = n$. On pose $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \cdots, f_n)$ une base de F. Par le théorème 27.13, on pose $u \in \mathcal{L}(E, F)$ l'unique application telle que $u(e_i) = f_i$. En particulier, l'image de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de F. Par le Théorème 27.20, u est bijective. C'est donc un isomorphisme, si bien que $E \simeq F$. $\square$

Corollaire 27.23

Tout $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Immédiat car $\dim \mathbb{K}^n = n$ et deux e.v. de même dimension finie sont isomorphes par ce qui précède. $\square$

3.2 Le cas particulier où $\dim E = \dim F$

Théorème 27.24

On suppose que E, F sont de **même** dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$u \text{ est injective} \quad \text{ssi} \quad u \text{ est surjective} \quad \text{ssi} \quad u \text{ est bijective}$$

Démonstration. On note $n = \dim E = \dim F$. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Comme $\dim F = n$, et que la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ possède n éléments,

$$\begin{aligned} &(u(e_1), \cdots, u(e_n)) \text{ est libre} \\ \text{ssi } &(u(e_1), \cdots, u(e_n)) \text{ est génératrice de } F \\ \text{ssi } &(u(e_1), \cdots, u(e_n)) \text{ est une base de } F \end{aligned}$$

Et le Théorème 27.20 transforme ces équivalences en le résultat voulu. □

Propriété 27.25 (Être inversible d'un côté suffit)

On suppose que E, F sont de **même** dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est bijective
2. Il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $v \circ u = \mathrm{id}_E$.
3. Il existe $w \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $u \circ w = \mathrm{id}_F$.

Et dans ce cas, $v = w = u^{-1}$.

Démonstration. Montrons que les assertions 1 et 2 sont équivalentes. Il est clair que 1 implique 2 en posant $v = u^{-1}$. Supposons maintenant qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $v \circ u = \mathrm{id}_E$. Montrons que u est bijective. Soit $x \in \operatorname{Ker} u$. Alors

$$x = \mathrm{id}_E(x) = (v \circ u)(x) = v(0_F) = 0_E$$

Ainsi, $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$. D'où u est injectif, et par le théorème 27.24, on en déduit que u est bijective.

Montrons que les assertions 1 et 3 sont équivalentes. Il est clair que 1 implique 3 en posant $w = u^{-1}$. Supposons maintenant qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, E)$ telle que $u \circ w = \mathrm{id}_F$. Montrons que u est bijective. Soit $y \in F$. On a

$$u(w(y)) = (u \circ w)(y) = y$$

Ainsi, y admet $w(y)$ comme antécédent par u, donc $y \in \operatorname{Im} u$. Par arbitraire sur y, on a donc $F = \operatorname{Im} u$. D'où u est surjective. Par le théorème 27.24, on en déduit que u est bijective.

Enfin, si $v \circ u = \mathrm{id}_E$ comme u est bijective, on peut composer à droite par u^{-1} et obtenir $v = u^{-1}$. De même $u \circ w = \mathrm{id}_F$ entraine $w = u^{-1}$. □

3.3 Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Propriété 27.26

On suppose E, F de dimension finies. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$$

Démonstration. On pose $n = \dim E$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}(E, F) &\to F^n \\ u &\mapsto (u(e_1), \cdots, u(e_n)) \end{aligned}$$

On peut facilement montrer que φ est linéaire, càd pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$, on a $\varphi(\alpha u + \beta v) = \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)$. On va montrer que φ est un isomorphisme. Par le théorème 27.13, on a

$$\forall (f_1, \cdots f_n) \in F^n \qquad \exists! u \in \mathcal{L}(E,F) \qquad \begin{cases} u(e_1) = f_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = f_n \end{cases}$$

Cette assertion se réécrit

$$\forall (f_1, \cdots f_n) \in F^n \qquad \exists! u \in \mathcal{L}(E,F) \qquad \varphi(u) = (f_1, \cdots, f_n)$$

Ce qui signifie exactement que φ est bijective. Donc φ est un isomorphisme. Alors, $\mathcal{L}(E,F)$ et F^n ont même dimension. Comme

$$\dim F^n = n \dim F = \dim E \times \dim F$$

on en déduit le résultat. □

4 Le théorème du rang

4.1 Rang (d'une famille, d'une application)

Définition 27.27 (Rang d'une famille de vecteurs)

Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On définit le rang de la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ par :

$$\operatorname{rg}(x_1, \cdots, x_n) := \dim(\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

Plus généralement, étant donné $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E, si l'ensemble $\operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I}$ est de dimension finie, on définit le rang de la famille $(x_i)_{i\in I}$ par :

$$\operatorname{rg}(x_i)_{i\in I} := \dim(\operatorname{Vect}(x_i)_{i\in I})$$

Remarque. La famille $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ engendre $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, et en particulier $\operatorname{Vect}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est bien de dimension finie et majorée par n. En particulier,

$$\operatorname{rg}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le n$$

Exemple 12. Soit $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. On montre que $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$. Ainsi $\operatorname{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\operatorname{Vect}(\mathcal{F})) = 2$.

Définition 27.28 (Rang d'une application linéaire)

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que u est de rang fini si $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie. On appelle alors rang de u l'entier

$$\operatorname{rg} u := \dim(\operatorname{Im} u) \in \mathbb{N}$$

Exemple 13. Déterminer le rang de l'application linéaire :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-y+z, y-z+t, x+t) \end{array}$$

Remarque.

- Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et on a $\operatorname{rg} u \leq \dim F$.
- Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et on a $\operatorname{rg} u \leq \dim E$.

4.2 Premiers résultats sur le rang

Propriété 27.29 (Composer par un isomorphisme ne modifie pas le rang)

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Si u est un isomorphisme et si v est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et
$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} v$$
2. Si v est un isomorphisme et si u est de rang fini, alors $v \circ u$ est de rang fini et
$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$$

Démonstration. On a $\operatorname{Im}(v \circ u) = \{v(u(x)) \mid x \in E\} = \{v(y) \mid y \in \operatorname{Im} u\} = v(\operatorname{Im} u)$.

1.

2. Comme v est un isomorphisme, $v : F \to G$ est injective. On pose alors w sa restriction à $\operatorname{Im} u$ et sa corestriction à $v(\operatorname{Im} u)$:
$$w : \operatorname{Im} u \to v(\operatorname{Im} u)$$
$$x \mapsto v(x)$$
v étant injective, il est clair que w l'est aussi, et par définition de $v(\operatorname{Im} u)$, w est aussi surjective. C'est donc un isomorphisme. D'où $\operatorname{Im} u \simeq v(\operatorname{Im} u)$. Comme u est de rang fini, $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie (égale à $\operatorname{rg} u$), donc $v(\operatorname{Im} u)$ aussi et les dimensions sont égales. Enfin, on a vu que $v(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im}(v \circ u)$ donc $v \circ u$ est de rang fini et
$$\operatorname{rg}(v \circ u) = \dim(\operatorname{Im}(v \circ u)) = \dim(v(\operatorname{Im} u)) = \operatorname{rg} u$$

$\square$

Propriété 27.30

Soit u, v deux morphismes de rangs finis. Alors $v \circ u$ est de rang fini et

$$\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$$

4.3 Théorème du rang

Lemme 27.31

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E. Alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.

Démonstration. Soit donc S tel que $\operatorname{Ker} u \oplus S = E$. On considère l'application

$$\begin{aligned} v : S &\to \operatorname{Im} u \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

Montrons que v est un isomorphisme. Il est clair que v est linéaire.

- Montrons que v est injective. Soit $x \in \operatorname{Ker} v$. Alors $v(x) = 0_F = u(x)$, donc $x \in \operatorname{Ker} u$. Or, par définition, $\operatorname{Ker} v \subset S$, donc $x \in S$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker} u \cap S$. Or, comme S et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires, on a $\operatorname{Ker} u \cap S = \{0_F\}$. Donc $x = 0_E$. Ainsi, v est injective.
- Montrons que v est surjective. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Alors il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$. On décompose alors x en
$$x = x_K + x_S \qquad \text{avec} \quad (x_K, x_S) \in (\operatorname{Ker} u) \times S$$
Alors, $u(x) = u(x_K) + u(x_S) = 0_F + u(x_S)$. Or, comme $x_S \in S$, on a $v(x_S) = u(x_S) = u(x) = y$. Ainsi, y admet un antécédent par v. Par arbitraire sur y, v est surjective.

$\square$

Théorème 27.32 (Théorème du rang)

On suppose E de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors u est de rang fini et

$$\boxed{\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u} \qquad = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u)$$

Démonstration. Comme E est de dimension finie, u est de rang fini (cf remarque sous la définition 27.28). Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, i.e. $\operatorname{Ker} u \oplus S = E$. Alors

$$\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim S$$

On considère

$$\begin{aligned} v : S &\to \operatorname{Im} u \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

par le lemme précédent, cette application est un isomorphisme. En particulier, $S \simeq \operatorname{Im} u$ donc $\dim S = \dim(\operatorname{Im} u)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) \\ &= \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u \end{aligned}$$

$\square$